On veillera à toujours faire un schéma précisant les transferts thermiques/transferts de travail ainsi que la convention choisie pour leur sens au moyen d'une flèche. Sauf mention explicite du contraire, les gaz seront considérés parfaits, de rapport γ indépendant de la température.

Exercices d'application : Centrale, Beau de Rochas/Carnot, Stirling, turbine, Brayton, pompe à chaleur

Culture en sciences physiques : Diesel, Stirling, centrale, température variable, Mollier, tuyère, couplage, turbine

Corrigés en TD : Centrale, Beau de Rochas et Carnot, Stirling, turbine couplage, Mollier, T variable.

Exemples de machines thermiques

Exercice 1 : Réchauffement d'un fleuve par une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire fournissant une puissance $\mathscr{P} = 1000\,\mathrm{MW}$ est installée au bord d'un fleuve servant de source froide à la température $T_f = 280\,\mathrm{K}$. Le réacteur tient lieu de source chaude, à la température $T_c = 700\,\mathrm{K}$.

On désigne par $\tau = 60\%$ le quotient du rendement de la centrale sur le rendement de Carnot.

1. Exprimer la puissance thermique fournie au fleuve, notée $\mathscr{P}_{tf}$.
2. Le fleuve est (évidemment) en écoulement qu'on suppose stationnaire. Son débit massique (masse d'eau traversant une section du fleuve par unité de seconde) est $d = 400 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Déterminer l'élévation de température du fleuve (on utilisera la capacité thermique massique de l'eau $c = 4{,}18\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$).

Exercice 2 : Comparaison des cycles de Beau de Rochas et de Carnot

On assimile le mélange combustible d'un moteur décrivant un cycle de Beau de Rochas à un gaz parfait de $c_v = 0{,}71\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$ et de coefficient $\gamma = 1{,}4$. On considère que le cycle est parcouru réversiblement.

1. Le mélange est au début de la phase de compression à la température de l'atmosphère $\theta_0 = 27\,°\mathrm{C}$. Déterminer la température à l'issue de la compression pour un taux de compression $\tau = V_{\max}/V_{\min}$ de 9.
2. Le pouvoir calorifique c du mélange est l'énergie libérée par la combustion d'un gramme de mélange. Il vaut $c = 2{,}76 \cdot 10^3\,\mathrm{J \cdot g^{-1}}$ pour le mélange considéré. En déduire la température des gaz à l'issue de la combustion isochore.
3. Calculer le rendement d'une machine de Carnot idéale fonctionnant entre cette température et celle du milieu extérieur, et le comparer au rendement théorique du cycle de Beau de Rochas.

Exercice 3 : Cycle de Diesel

Le moteur diesel, inventé par Rudolf Diesel en 1893 est un autre exemple de moteur à quatre temps, présentant quelques différences avec le cycle de Beau de Rochas. Nous supposerons pour simplifier qu'il est parcouru de manière réversible par un gaz parfait de capacités thermiques constantes.

admission $A_0 \to A_1$ l'admission est identique mais le piston n'aspire que de l'air,

compression $A_1 \to A_2$ la compression est identique, toujours adiabatique,

combustion-détente $A_2 \to A_3$ $A_3 \to A_4$ le combustible est introduit sous pression en haut du cylindre. À la température élevée de l'air comprimé, l'inflammation est spontanée (pas besoin de bougies). Cette combustion, relativement lente produit un échauffement isobare $A_2 \to A_3$. On observe ensuite une détente adiabatique $A_3 \to A_4$, avec $V_4 = V_1$ une fois la combustion effectuée.

échappement identique au cycle de Beau de Rochas. Comme pour ce dernier, on considère que les phases d'admission et de détente se compensent exactement, en le modélisant par un refroidissement isochore $A_4 \to A_1$, suivi d'un échappement isobare $A_1 \to A_0$.

1. Représenter le diagramme de Watt du piston et le cycle de Clapeyron correspondant du gaz quand on en supprime les phases d'admission et d'échappement (on obtient deux isentropiques, une isobare et une isochore).
2. Identifier les transformations au cours desquelles le système reçoit le transfert thermique Q_c « de la source chaude » et Q_f de la source froide. Déterminer les expressions de Q_f et Q_c en fonction des températures des points correspondants du diagramme de Clapeyron.
3. Déterminer les températures des différents points du cycle en fonction de T_f, température de A_1, des rapports $\alpha = V_1/V_2$ et $\beta = V_1/V_3$, du nombre de moles n et des capacités thermiques molaires $C_{p,m}$ et $C_{v,m}$. En déduire les expressions de Q_1 et Q_2 en fonction de ces mêmes grandeurs.
4. Exprimer alors, après l'avoir défini, le rendement r du cycle, en fonction de α, β et γ. On vérifiera qu'on obtient :
$$r = 1 - \frac{1}{\gamma(\alpha\beta)^{\gamma-1}} \frac{\alpha^\gamma - \beta^\gamma}{\alpha - \beta}.$$
Calculer ce rendement pour des volumes $V_1 = 240\,\mathrm{cm^3}$; $V_2 = 16\,\mathrm{cm^3}$; $v_3 = 48\,\mathrm{cm^3}$, le gaz étant de l'air considéré comme gaz parfait diatomique.
5. Calculer directement le travail total W reçu par le gaz au cours du cycle (ne pas avoir peur des expressions assez lourdes qu'on obtient) et comparer à $Q_f + Q_c$. Que retrouve-t-on ?

Premier principe industriel

Exercice 4 : Détente dans une turbine

De l'air, assimilé à un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, traverse une turbine calorifugée. Le débit de masse vaut $D_m = 1{,}5\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Les conditions à l'entrée sont $P_e = 12\,\mathrm{bar}$, $\theta_e = 700\,°\mathrm{C}$. En sortie, on a $P_s = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ et $\theta_s = 280\,°\mathrm{C}$.

1. Montrer que la capacité thermique massique isobare vaut $c_P = 1{,}0\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.
2. Déterminer la puissance fournie par la turbine à l'extérieur. Commenter son signe.
3. Rappeler l'expression des variations de l'entropie massique d'un gaz parfait en coordonnées T, P. Calculer la variation d'entropie massique de l'air au cours de la détente. L'évolution est-elle réversible ?

4. Quelle serait la température de sortie dans le cas isentropique ?
5. Comparer la puissance fournie par la turbine réelle à celle qui aurait été fournie, si la détente était isentropique. Proposer une définition du *rendement isentropique* de la turbine.
6. On modélise l'évolution réelle par une transformation polytropique d'exposant k : $Pv^k = \text{Cte}$. Déterminer la valeur de k. Commenter cette démarche.

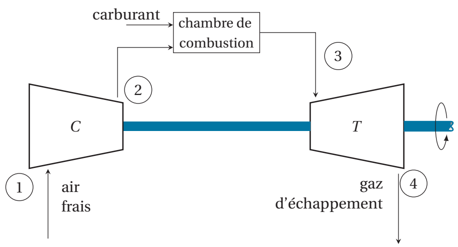
Exercice 5 : Compresseur biétagé

On envisage de réaliser une compression de 1 bar à 10 bar en deux étapes séparées par un refroidissement. Chaque étage est constitué d'un compresseur adiabatique réversible en écoulement stationnaire. L'étage basse pression comprime le gaz parfait depuis l'état 1 ($P_1 = 1{,}0\,\text{bar}, T_1 = 293\,\text{K}$) jusqu'à un état 2 ($P_2, T_2$). Le gaz est alors refroidi à pression constante jusqu'à l'état 3 ($P_3 = P_2, T_3 = T_1 = 293\,\text{K}$). Puis, il est comprimé dans l'étage haute pression jusqu'à l'état 4 (pression $P_4 = 10\,\text{bar}$). On donne $\gamma = 1{,}40$ et $r = R/M = 287\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ où R est la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz.

1. Exprimer le travail massique total de compression en fonction de γ, r, T_1, P_2/P_1 et P_4/P_2.
2. Déterminer la pression intermédiaire P_2 qui conduit au travail minimal.
3. Dans ces conditions, calculer le travail massique total de compression.
4. Le comparer au travail qui aurait été fourni par un compresseur monoétagé.

Exercice 6 : Cycle de Brayton

Nous étudions une turbine à gaz servant à la propulsion d'un navire dont le schéma synoptique est donné ci-dessous. Nous modélisons son fonctionnement par un cycle fermé appelé cycle de Brayton idéal.



- Le fluide est de l'air.
- Étape 1 → 2 : compression adiabatique réversible.
- Étape 2 → 3 : chauffage isobare.
- Étape 3 → 4 : détente adiabatique réversible.
- Étape 4 → 1 : refroidissement isobare.

Données :

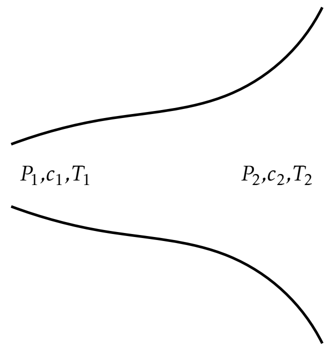
Température à l'entrée du compresseur : $T_1 = 300\,\text{K}$; pression à l'entrée du compresseur : $P_1 = 1{,}013\,\text{bar}$; pression à la sortie du compresseur : $P_2 = 10\,\text{bar}$; température à l'entrée de la turbine : $T_3 = 1300\,\text{K}$.

Les valeurs sont à lire sur la figure 1.

1. Déterminer la température de l'air en sortie du compresseur T_2.
2. Déterminer également la température de l'air en sortie de turbine T_4.
3. Déterminer le rapport du travail consommé par le compresseur au travail produit par la turbine.
4. Déterminer le rendement thermique de ce cycle.
5. Déterminer la capacité thermique massique de l'air, en observant qu'elle varie peu sur le domaine de températures considéré. Quelle valeur attendrait-on dans le modèle du gaz parfait ? Quelle serait pour un tel gaz l'équation d'une isotherme ? Ce modèle est-il ici pertinent ? On étudiera en particulier la validité de la loi de Laplace lors de la traversée du compresseur.

Exercice 7 : Étude d'une tuyère

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement d'un gaz parfait de masse molaire M dans une tuyère. On supposera pour simplifier que le coefficient γ est constant. L'écoulement du gaz est stationnaire dans une tuyère de forme quelconque.



1. En supposant la tuyère sans perte thermique et d'altitude constante, montrer que :

$$c_p\left(T_2 - T_1\right) = \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_2^2\right),$$

avec c la vitesse macroscopique de l'écoulement.

2. Exprimer la capacité thermique massique c_p en fonction de R (constante des gaz parfaits), de M (masse molaire du gaz) et de γ. En déduire une relation entre les variations $\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}(c^2)$ du gaz à la traversée d'une portion infinitésimale de la tuyère.
3. On admet que le gaz parfait lors de son évolution obéit aux lois de Laplace.
   (a) Donner l'expression de la loi de Laplace en coordonnées T, ρ, (avec ρ la masse volumique) puis donner sa différenciation logarithmique ($\mathrm{d}X/X$ pour X quelconque). On vérifiera qu'on a $T/\rho^{\gamma-1} = cste$.
   (b) Exprimer la conservation du débit de masse puis la relation obtenue par différenciation logarithmique, en utilisant s la section de la tuyère, variable le long de l'écoulement.
   (c) En déduire qu'on a $\frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\mathrm{d}c}{c}\left(\frac{c^2 M}{\gamma RT} - 1\right)$.
   (d) En déduire que pour un certain domaine de vitesse, l'élargissement de la tuyère se traduira par une accélération du gaz.
   (e) Quelles sont, à votre avis, les hypothèses nécessaires à l'établissement des lois de Laplace qui seront ici les moins certaines ?
4. ⚡ **Question indépendante** Cette tuyère permet l'échappement des gaz de combustion d'une fusée. Celle-ci se propulse en éjectant une masse μ_m par unité de temps stationnaire à une vitesse $\vec{v}$ elle aussi stationnaire par rapport à la fusée.
   (a) Appliquer le théorème de la résultante cinétique au système fermé constitué :
      - à l'instant t de la fusée et des gaz qu'elle contient, de masse totale $m(t)$ animés de la vitesse $\vec{V}$ dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_T$ considéré galiléen,

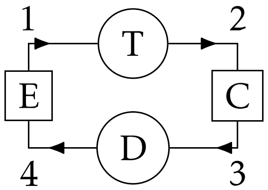
- à l'instant $t+dt$ de la fusée et des gaz qu'elle contient alors (de masse $m(t)-\mu_m dt$) de vitesse $\overrightarrow{V}+\mathrm{d}\overrightarrow{V}$ et de la masse $\mu_m dt$ animés dans $\mathscr{R}_T$ d'une vitesse qu'on déterminera.

En déduire l'expression d'une « force propulsive » qu'on exprimera en fonction de μ_m et $\overrightarrow{v}$.

(b) En déduire alors l'intérêt d'une telle tuyère si les gaz de combustion sont initialement produits à la vitesse $\overrightarrow{v}_1$.

Machines thermiques avec changement d'état

Exercice 8 : Pompe à chaleur



Pour chauffer une maison, on utilise une pompe à chaleur recevant un transfert thermique de l'atmosphère extérieure dont la température est $T = 283$ K. La machine est constituée d'un détendeur D, d'un évaporateur E, d'un compresseur T et d'un condenseur C. Le fluide utilisé, dit caloporteur, est le fréon, considéré comme un gaz parfait.

1. Le fonctionnement de la machine correspond au cycle suivant :

Compression adiabatique réversible $1 \to 2$, le fluide passant de l'état de vapeur saturante ($\theta = \theta_1 = 5\,°\mathrm{C}$, $P = P_1 = 3{,}6\,\mathrm{bar}$) à celui de vapeur sèche sous la pression $P_2 = 15{,}2\,\mathrm{bar}$. Le fluide reçoit du compresseur le travail w_{ext}.

Isobare $2 \to 3$, le fluide sortant du condenseur sous forme de liquide de saturation ($\theta = 60\,°\mathrm{C}$, $P = 15{,}2\,\mathrm{bar}$), Le fluide ne reçoit de l'extérieur qu'un transfert thermique $q_{2\to3}$.

Détente isenthalpique $3 \to 4$ dans le détendeur, amenant le fluide dans les conditions ($\theta = 5\,°\mathrm{C}$, $P_1 = 3{,}6\,\mathrm{bar}$), Le fluide ne reçoit ni travail extérieur ni transfert thermique.

Isobare $4 \to 1$, le fluide sortant de l'évaporateur sous forme de vapeur saturante ($\theta = \theta_1 = 5\,°\mathrm{C}$, $P = P_1 = 3{,}6\,\mathrm{bar}$). Le fluide ne reçoit de l'extérieur que le transfert thermique $q_{4\to1}$.

(a) Représenter ce cycle dans le diagramme de Clapeyron. Préciser le signe des transferts thermiques et travaux reçus à chaque étape.

(b) Quelles sont les étapes au cours desquelles le fluide reçoit un travail utile ?

(c) Définir et déterminer l'efficacité e de la pompe à chaleur ; on lira les valeurs sur la figure 2.

(d) Faire un bilan d'énergie. On déterminera tous les transferts thermiques et travaux et on vérifier en particulier la valeur de leur somme.

(e) Déterminer également la composition du mélange diphasé au point 4, on vérifiera l'accord avec la valeur donnée par le théorème des moments.

(f) Estimer les capacités thermiques massiques du liquide seul et de la vapeur sèche.

2. Afin d'améliorer l'efficacité de la machine, on modifie l'état final de la transformation $2 \to 3$. En 3, le fluide est désormais dans l'état liquide à la température $\theta' = 40\,°\mathrm{C}$ et sous la pression $P = 15{,}2\,\mathrm{bar}$. Donner la nouvelle valeur du coefficient e.

Exercice 9 : Diagramme de Mollier

On donne à la figure 3 le *diagramme de Mollier* de la vapeur d'eau et du mélange eau liquide/vapeur, représentant l'entropie massique s en fonction de l'enthalpie massique h. La courbe de saturation est représentée en gras, le point critique étant représenté par le point noir. Les autres courbes représentées sont : des isothermes, des isobares, des isochores, et des isotitres sur lesquelles c'est la proportion de vapeur qui est constante.

↯ Lecture du diagramme

1. Identifier le domaine de la vapeur sèche et celui du mélange liquide/vapeur en équilibre.
2. (a) Montrer, en admettant l'identité thermodynamique $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - P\,\mathrm{d}v$, l'identité $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P$.
   (b) Comment varie la pression d'une vapeur quand l'entropie augmente à enthalpie constante ? En déduire dans quelle zone la vapeur sèche se comporte comme un gaz parfait et identifier ainsi les isothermes.
   (c) Montrer que les isobares et les isothermes du mélange liquide/vapeur sont confondues et que leur courbe $h = f(s)$ est une droite dont on déterminera la pente. Identifier les isothermes et les isobares du mélange en équilibre.
3. (a) Comment doit varier l'enthalpie d'une vapeur sèche en fonction de son entropie sur une isobare, en admettant qu'elle se comporte comme un gaz parfait ?
   (b) Justifier que la pente d'une isobare est continue à la traversée de la courbe de rosée.
4. Identifier les isobares de la vapeur sèche.

Cycle de Rankine On rappelle que le cycle de Rankine d'une machine à vapeur se compose :

$A \to B$: phase d'évaporation et admission dans les conditions $P_2 = 12\,\mathrm{bar}, \theta_2 = 188\,°\mathrm{C}$,

$B \to C$: détente isentropique (sous la courbe de rosée) jusqu'à $P_1 = 0{,}2\,\mathrm{bar}, \theta_1 = 60\,°\mathrm{C}$: on a alors un mélange liquide-vapeur,

$C \to D$: condensation à P_1, T_1 : toute l'eau est alors liquide à P_1,

$D \to E$: pompage isentropique du liquide jusqu'à P_2,

$E \to A$: réchauffement de l'eau à P_2 jusqu'à T_2

1. Représenter l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron.
2. (a) À l'aide des conclusions précédentes, tracer l'allure du cycle dans le diagramme de Mollier (pourquoi ne peut-on pas déterminer la position du point E ?)
   (b) Déterminer son rendement en lisant les valeurs nécessaires sur la figure 3.
   (c) ↯ Justifier qu'on a $h_D \simeq h_E$ en comparant les ordres de grandeur des variations de h d'une phase condensée incompressible indilatable (de l'eau liquide par exemple) pour les transformations isentropiques et isobare envisagées ici.

Principes généraux des machines thermiques

Exercice 10 : Cycle de Stirling

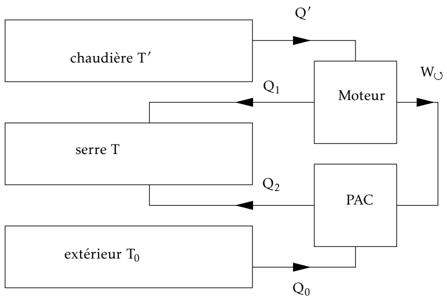
Un gaz supposé parfait de capacités thermiques molaires $C_{v,m}$ et $C_{p,m}$ constantes décrit un cycle moteur, supposé réversible, composé de deux isothermes (source chaude de température T_c et source froide de température T_f) et de deux isochores.

1. Tracer l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron.
2. Montrer que les quantités de chaleur échangées au cours des évolutions isochores sont opposées.
3. Ces échanges de chaleur se font au moyen d'un régénérateur, interne à la machine. Les seuls échanges avec l'extérieur sont donc réalisés durant les transformations isothermes.
   (a) Proposer un dispositif permettant d'effectuer la régénération, *ie* stocker de l'énergie quand le gaz est chaud et la lui restituer quand il est froid.
   (b) Déterminer le rendement du cycle et commenter le résultat obtenu.

Exercice 11 : Cogénération

Pour maintenir une serre à la température constante T, l'extérieur étant à la température T_0, il faut fournir par jour la quantité de chaleur Q, par exemple par transfert direct depuis une chaudière à la température T'. On propose un autre mode de chauffage utilisant deux machines :

1. un moteur fonctionnant entre la chaudière à T' et la serre à T,
2. une pompe à chaleur entre l'extérieur à T_0 et la serre à T.



Définir et déterminer l'efficacité d'un tel dispositif en supposant que chaque machine fonctionne de manière réversible. On en donnera l'expression en fonction du rendement du moteur r du moteur et de l'efficacité e de la pompe à chaleur, puis en fonction des températures des sources. Comparer à l'utilisation de la chaudière seule.

Exercice 12 : Sources de température variable

On peut appliquer les résultats généraux des machines thermiques au cas de sources dont la température n'est pas constante si leur variation de température au cours d'un cycle est faible, *ie* si les transferts thermiques par cycle avec chacune de ces sources sont faibles devant l'énergie interne de la source. On illustre ce principe dans l'exercice suivant.

Deux corps (solides idéaux) identiques, de même capacités thermiques C constantes, et dont les températures initiales sont respectivement T_c (corps chaud) et T_f (corps froid), servent de source de chaleur à une machine idéale, supposée motrice, fonctionnant par cycles réversibles entre ces deux sources seulement. On suppose que chaque cycle met en jeu des énergies suffisamment faibles pour que la température des sources ne varie pas notablement au cours d'un cycle. Quelle est la température de l'ensemble au bout d'un temps très long (en supposant que l'hypothèse soit valable jusqu'au bout), ainsi que le travail total obtenu ?

Indication : *On exprimera les variations de température* $\mathrm{d}T_f$ *et* $\mathrm{d}T_c$ *considérées infinitésimales des deux corps sur un cycle en fonction des transferts thermiques infinitésimaux sur un cycle avec la machine.*

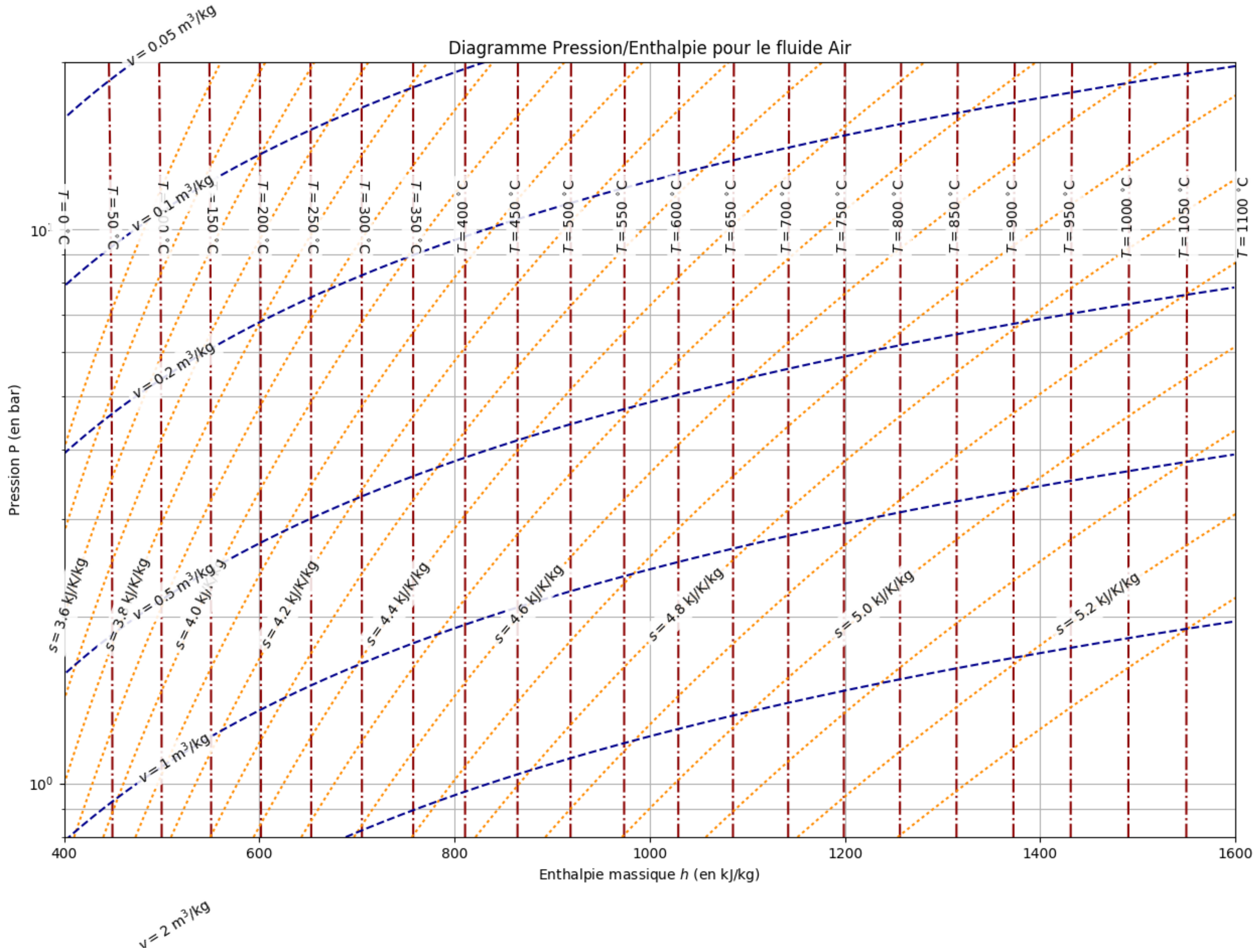


Fig. 1 : Diagramme P, h de l'air.

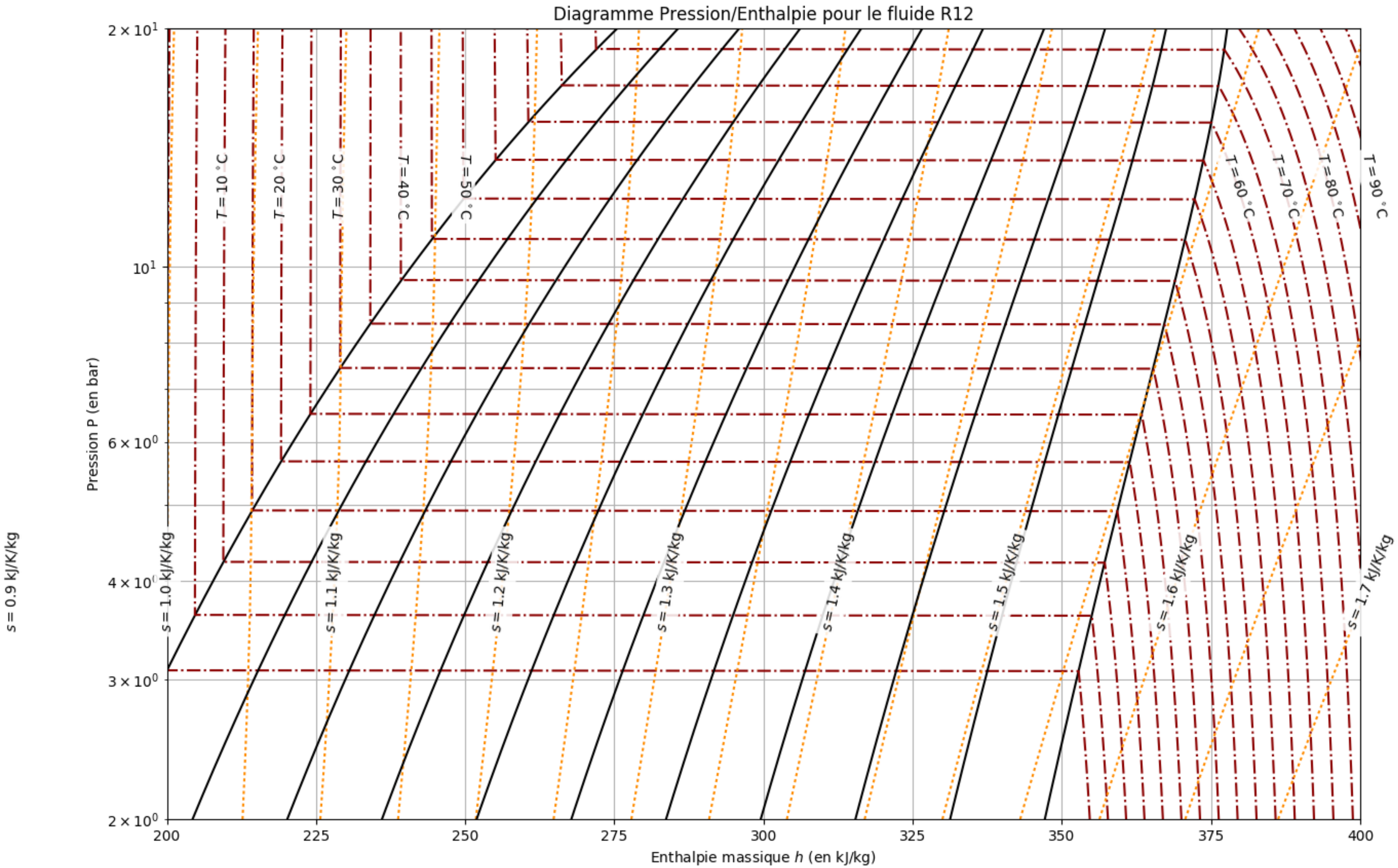


Fig. 2 : Diagramme P, h du fréon (R12).

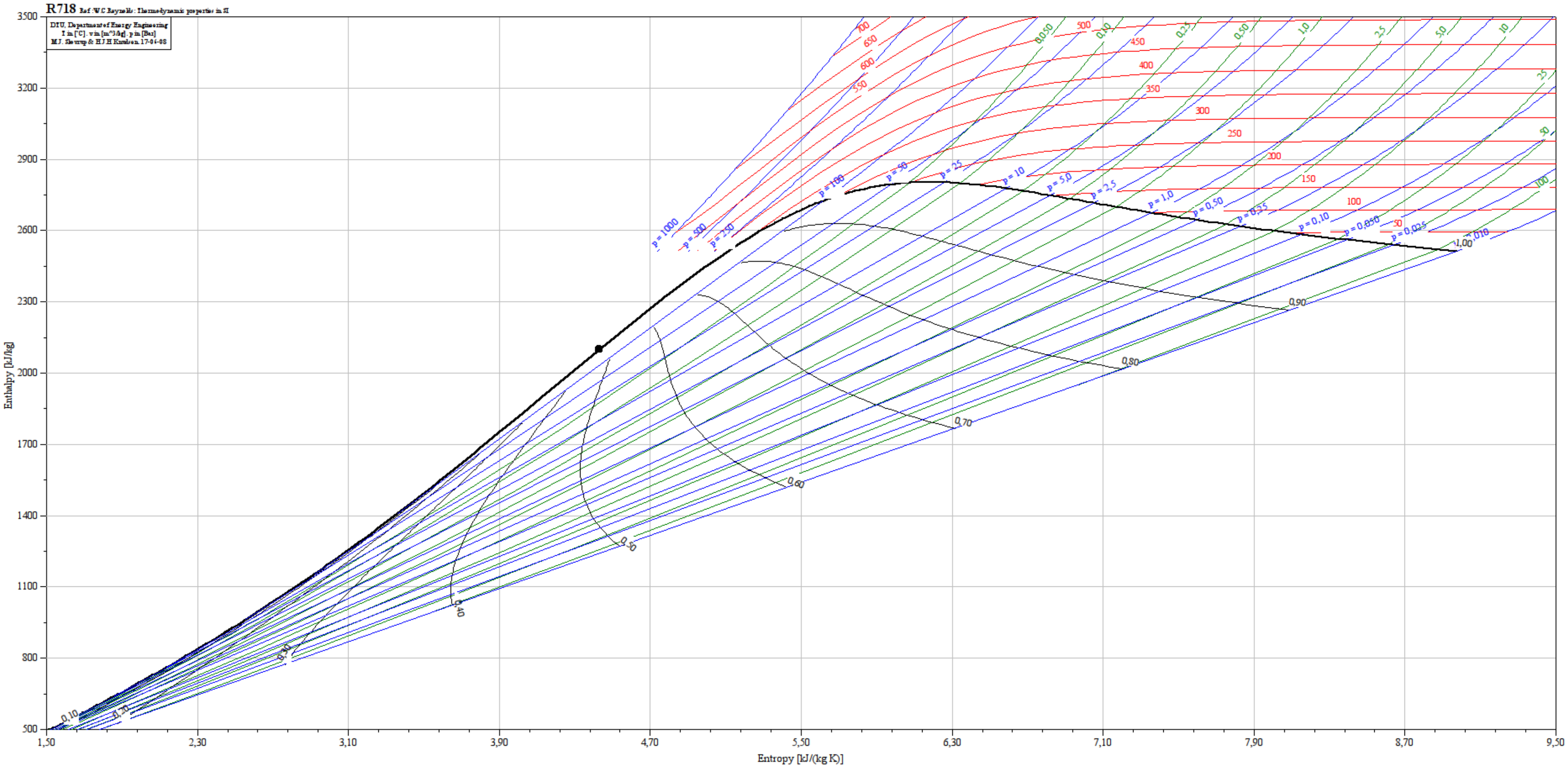


FIG. 3 : Diagramme de Mollier de l'eau.

Correction de l'exercice 1

1. La machine fournit la puissance $\mathscr{P}$ à l'extérieur en consommant la puissance thermique $\mathscr{P}_{tc}$, ces deux grandeurs étant reliées par le rendement : $r = \frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_{tc}} = \tau(1 - T_f/T_c)$, avec $\tau = 0{,}6$. La puissance thermique fournie à l'eau de refroidissement est $\mathscr{P}_{tf}$ et le premier principe sur un cycle assure que $-\mathscr{P} + \mathscr{P}_{tc} - \mathscr{P}_{tf} = 0$, soit, après calculs : $\mathscr{P}_{tf} = \left(\frac{T_c}{\tau(T_c - T_f)} - 1\right)\mathscr{P}$.

2. On applique le premier principe industriel à l'eau du fleuve, qu'on suppose en écoulement stationnaire. Entre l'amont et l'aval de la centrale, le bilan d'enthalpie massique s'écrit :
$$\mathscr{P}_{t,f} = d\Delta h = dc\Delta T,$$
avec ΔT la variation de température entre l'amont et l'aval. On calcule :
$$\Delta T = \frac{\mathscr{P}_{tf}}{dc} = \left(\frac{T_c}{\tau(T_c - T_f)} - 1\right)\frac{\mathscr{P}}{cd} = 1{,}2\,\mathrm{K}$$

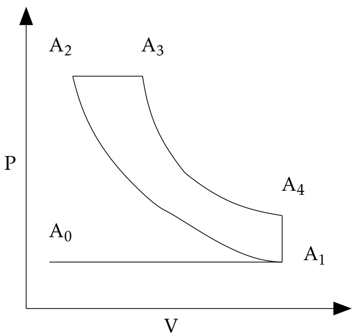
Correction de l'exercice 2

1. On peut appliquer la loi de Laplace pour la compression adiabatique réversible (donc isentropique) d'une gaz parfait de γ constant. On atteint à l'issue de cette phase la température $T_1 = T_0\,\tau^{\alpha-1} = 722\ K$.

2. Le transfert thermique apporté par la combustion d'une masse m de mélange est $Q_c = cm$. Comme cette combustion est isochore, elle provoque une élévation de température $\Delta T = Q_c/(mc_v) = c/c_v = 3887$ K, soit une température T_2 finale de $T_2 = 4609$ K.

3. Une machine de Carnot idéale fonctionnant entre T_0 et T_2 aurait un rendement de $1 - T_0/T_2 = 94\%$, bien meilleur que celui du cycle de Beau de Rochas : $1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} = 58\%$. La réalisation en serait cependant bien moins compacte et il ne pourrait pas être embarqué dans un véhicule.

Correction de l'exercice 3



1. L'allure idéalisée du diagramme de Watt d'un cycle de Diesel est représentée sur la figure ci-contre. À la différence du cycle de Beau de Rochas, la phase de combustion est isobare au lieu d'être isochore car elle se produit pendant toute la phase d'admission du carburant.

2. Le transfert thermique est reçu de la source chaude lors de la transformation $A_2 \to A_3$ et de l'énergie est cédée à la source froide lors du refroidissement isochore $A_4 \to A_1$. Lors de la détente isobare, le transfert thermique est égal à la variation d'enthalpie : $Q_c = nC_{p,m}(T_3 - T_c)$. Lors du refroidissement isochore, le transfert thermique est maintenant déterminé par la variation d'énergie interne : $Q_f = nC_{v,m}(T_f - T_4)$.

3. On commence au point A_1, à T_f, V_1. La loi de Laplace écrite en T, V donne la température du point 2 à l'issue de la compression adiabatique réversible : $T_c = T_f\ \alpha^{\gamma-1}$. Lors de la transformation isobare suivante, T/V se conserve, donc $T_3 = T_c V_3/V_2 = T_c\alpha/\beta$. Enfin, lors de la détente adiabatique, $T_4 = T_3(V_3/V_1)^{\gamma-1}$. On en déduit les transferts thermiques :
$$Q_c = nC_{p,m}T_f\alpha^{\gamma-1}(\frac{\alpha}{\beta} - 1) \quad \text{et} \quad Q_f = nC_{v,m}T_f\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}\right).$$

4. Le rendement $r = -W_{\circlearrowleft}/Q_c$ vaut finalement :
$$r = \frac{Q_f + Q_c}{Q_c} = 1 - \frac{C_{v,m}}{C_{p,m}}\frac{(\frac{\alpha}{\beta})^{\gamma} - 1}{\alpha^{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)} = 1 - \frac{1}{\gamma(\alpha\beta)^{\gamma-1}}\frac{\alpha^{\gamma} - \beta^{\gamma}}{\alpha - \beta}.$$
On a ici $\gamma = 1{,}4$; $\alpha = 15$ et $\beta = 5$. On calcule alors $r = 0{,}56$.

5. Lors de la compression adiabatique, le travail est égal à la variation d'énergie interne : $W_{comp} = \Delta U = nC_{v,m}(T_c - T_f) = nC_{v,m}T_f\left(\alpha^{\gamma-1} - 1\right)$. Lors de la compression isobare, le travail vaut $W_{isoP} = -P_2(V_3 - V_2)$. On a donc :
$$W_{isoP} = -P_2(V_3 - V_2) = -P_2V_2\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = -nRT_c\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = -nRT_f\alpha^{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)$$
On réutilise l'expression de W_{comp} précédente pour déterminer le travail W_{det} lors de la détente isentropique : $W_{det} = -nC_{v,m}T_f\left(\beta^{1-\gamma} - 1\right)$. Avec l'expression précédente de T_3, on obtient :
$$W_{det} = nC_{v,m}T_3\left(\beta^{1-\gamma} - 1\right) = nC_{v,m}T_f\frac{\alpha}{\beta}\alpha^{\gamma-1}\left(\beta^{1-\gamma} - 1\right)$$
Enfin, le travail est nul lors de l'isochore finale. Le travail total vaut donc :
$$W = nC_{v,m}T_f\left(\alpha^{\gamma-1} - 1 - (\gamma-1)\alpha^{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}\left(\beta^{\gamma-1} - 1\right)\right) = nC_{v,m}T_f\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma} - 1 - \gamma\left(\frac{\alpha^{\gamma}}{\beta} - \alpha^{\gamma-1}\right)\right)$$
Le transfert thermique total sur le cycle est :
$$Q_f + Q_c = nC_{v,m}T_f\left(1 - \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}}\right) + nC_{p,m}T_f\alpha^{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = nC_{v,m}T_f\left(1 - \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}} + \gamma\left(\frac{\alpha^{\gamma}}{\beta} - \alpha^{\gamma-1}\right)\right).$$
On a bien : $W = -(Q_f + Q_c)$.

Correction de l'exercice 4

1. Pour un gaz parfait de coefficient γ, les relations de Mayer donnent :
$$c_P = \frac{R}{M}\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{8{,}314}{29 \cdot 10^{-3}}\frac{1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}0\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}. \tag{1}$$

2. D'après le premier principe industriel, la puissance *fournie* par la turbine vaut l'opposé de celle reçue par le fluide, soit :
$$-D_m c_P \Delta\theta = D_m c_P(\theta_e - \theta_s) = 1{,}5 \times (700 - 280) = 0{,}63\,\mathrm{MW}. \tag{2}$$
On vérifie qu'elle est bien positive.

3. L'évolution est adiabatique. Si elle est réversible, elle est donc isentropique. La variation d'entropie massique est alors :
$$\Delta s = s_s - s_e = c_P \ln\frac{T_s}{T_e} - \frac{R}{M}\ln\frac{P_s}{P_e} = 0{,}15\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}. \quad (3)$$
Cette évolution adiabatique n'est pas isentropique, donc elle n'est pas réversible.

4. Dans le cas d'une transformation isentropique, les lois de Laplace donnent :
$$T_{is} = T_e\left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 478\,\mathrm{K}. \quad (4)$$
Lors de l'évolution réelle, la température de sortie est plus élevée que celle qui aurait été obtenue lors d'une évolution réversible.

5. La puissance que fournirait la turbine « isentropique » vaut : $D_m c_P (T_e - T_{is}) = 0{,}74\,\mathrm{MW}$.

   Le *rendement isentropique*, noté ρ_{is}, de la turbine est défini comme le rapport de la puissance fournie dans le cas réel sur celle dans le cas idéal. Il vient, dans le cas d'un gaz parfait :
$$\rho_{is} = \frac{T_e - T_s}{T_e - T_{is}} = 0{,}85. \quad (5)$$

6. Avec les transformations polytropiques de gaz parfaits, les relations reliant les grandeurs d'entrée et de sortie ont la même forme qu'avec les lois de Laplace : il suffit de remplacer l'exposant γ par l'exposant k. On a donc :
$$P_e^{1-k}T_e^k = P_s^{1-k}T_s^k \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\ln\frac{P_e}{P_s} = k\ln\frac{T_s}{T_e} \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{\ln\frac{P_e}{P_s}}{\ln\frac{P_e T_s}{P_s T_e}} = 1{,}3. \quad (6)$$
En réalité, nous ne savons pas si le gaz passe par une suite d'états d'équilibre interne quand il traverse la turbine. Seuls les états d'entrée et de sortie sont clairement définis. Donc cette évolution polytropique n'a que le statut de modèle et nous avons trouvé l'exposant k qui permet à ce modèle de passer par le bon état d'entrée et le bon état de sortie.

Correction de l'exercice 5

Le refroidissement intermédiaire se déroule dans un échangeur thermique sans pièce mobile, donc sans travail utile.

1. Le premier principe industriel à chaque étage de compression donne :
$$\Delta h = w_u \quad\Longrightarrow\quad c_P(T_s - T_e) = w_u \quad \text{avec : } c_P = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}. \quad (7)$$
On détermine ensuire les températures T_2 et T_4 en fonction de T_1 et des taux de compression. Pour cela, on applique les lois de Laplace puisqu'il s'agit de transformations isentropiques d'un gaz parfait. Il vient :
$$T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{et : } T_4 = T_1\left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (8)$$
Finalement, le travail total massique de compression s'écrit :
$$w = \frac{\gamma r}{\gamma-1}T_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2\right]. \quad (9)$$

2. Le travail massique total de compression w est une fonction de la pression P_2. On cherche la valeur de P_2 qui annule la dérivée de w. On pose $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$ et on introduit la fonction $g(P_2)$ définie par la relation :
$$w = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}T_1 \times g(P_2). \quad (10)$$
En remarquant que $\left(\frac{P_4}{P_2}\right)^\alpha = \left(\frac{P_2}{P_4}\right)^{-\alpha}$, on calcule : $g'(P_2) = \alpha P_2^{\alpha-1}P_1^{-\alpha} - \alpha P_2^{-\alpha-1}P_4$.

   Cette dérivée s'annule pour :
$$P_2^{\alpha-1}P_1^{-\alpha} = P_2^{-\alpha-1}P_4^{\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_4}{P_2} \quad\Longrightarrow\quad P_2 = \sqrt{P_1 P_4}. \quad (11)$$
Remarque : On peut vérifier rapidement qu'il s'agit bien d'un minimum et on remarque ici que les taux de compression sont identiques. Par conséquent, $T_4 = T_2$ et chaque étage apporte le même travail utile.

   On calcule $P_2 = 3{,}2\,\mathrm{bar}$ et la température : $T_2 = 407\,\mathrm{K}$.

3. Valeur numérique du travail minimal de compression biétagée : $w = 229\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

4. Lors d'une compression monoétagée, avec un seul compresseur, on aurait :
$$w_{\text{mono}} = \frac{\gamma r}{\gamma-1}T_1\left[\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^\alpha - 1\right] = 274\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}. \quad (12)$$
La température en fin de compression serait 566 K.

   Remarque : D'une part, le compresseur biétagé avec refroidissement intermédiaire permet une nette économie sur le travail utile à fournir au gaz. D'autre part, les pièces mobiles sont moins sollicitées thermiquement, car les gaz en sortie ont une température plus basse.

Correction de l'exercice 6

Le cycle est représenté sur la figure 4 : on se déplace en particulier à $s = \text{cste}$ sur les étapes adiabatiques et réversibles.

1. On lit au point M_2 : $\theta_2 \simeq 310\,°\mathrm{C}$.

2. On lit au point M_4 : $\theta_4 \simeq 450\,°\mathrm{C}$.

3. Le premier principe industriel pour un écoulement stationnaire s'écrit, en négligeant les variations d'énergie mécanique $\Delta h = w_a + q$. Les traversées du compresseur et de la turbine sont adiabatiques, on y a donc : $\Delta h = w_a$. On lit :
$$w_C = h_2 - h_1 = 270\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}} \qquad w_T = h_4 - h_3 = -700\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}.$$
La détente dans la turbine fournit donc $-w_T$, supérieur au travail nécessaire pour faire fonctionner le compresseur, heureusement.

4. Le travail fourni par la turbine à l'extérieur, égal à $-w_T - w_C = 430\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$, qui est aussi le travail total fourni sur un cycle.

   L'air reçoit le transfert thermique $q_c = h_3 - h_2 = 850\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ dans la chambre de combustion.

   Le rendement est donc :
$$r = \frac{-w_T - w_C}{q_c} = 0{,}50. \quad (13)$$

5. On observe que les courbes isothermes sont équidistantes sur l'axe des enthalpies massiques : la capacité thermique massique c est donc approximativement constante. On la calcule :

$$c = \frac{1200}{1100} = 1{,}1\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}.$$

En considérant l'air comme un gaz parfait diatomique $\gamma = 1{,}4$ de masse molaire $M \simeq 0{,}8 \times M(\mathrm{N_2}) + 0{,}2 \times M(\mathrm{O_2}) = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, on aurait :

$$c = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} = 1{,}0\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}.$$

Ces valeurs sont tout à fait comparables. L'air se comporte pratiquement comme un gaz parfait diatomique. Pour un gaz parfait, h ne dépend que de la température : les isothermes seront donc des droites verticales dans le diagramme (P, h). On constate ici que ce n'est pas tout à fait le cas, d'autant plus qu'on proche de la courbe de rosée.

On peut par ailleurs comparer la valeur de T_2 à celle donnée par la loi de Laplace : $T_{2,L} = T_1(P_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 580\,\mathrm{K}$ soit $\theta_{2,L} = 306\,^\circ\mathrm{C}$, peu différent de la valeur lue.

Correction de l'exercice 7

1. (a) Le premier principe industriel donne, en tenant compte de l'énergie cinétique macroscopique, $\mathrm{d}\left(h + \frac{1}{2}c^2\right) = 0$, avec h l'enthalpie massique. Pour un gaz parfait (2ème loi de Joule), on a $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$, et donc $c_p\,(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\left(c_1^2 - v_2^2\right)$.

   (b) On a $C_{pm} = R\gamma/(\gamma-1)$ et donc $c_p = R\gamma/\left(M(\gamma-1)\right)$. La forme différentielle de l'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}\,\mathrm{d}T = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}c^2.$$

2. (a) La loi de Laplace assure que $TV^{\gamma-1} = cste$, soit $T/\rho^{\gamma-1} = cste'$. La différentielle logarithmique de cette équation donne : $\mathrm{d}T/T + (1-\gamma)\mathrm{d}\rho/\rho = 0$.

   (b) La masse traversant une section s pendant $\mathrm{d}t$ est la masse contenue dans un cylindre de base s et de hauteur $c\,\mathrm{d}t$, soit $\rho v s\,\mathrm{d}t$. La conservation du débit de masse assure alors $\rho s v = cste$, ce qui peut aussi s'écrire $d\rho/\rho + \mathrm{d}s/s + \mathrm{d}c/c = 0$.

   (c) La loi de Laplace donne : $\mathrm{d}\rho/\rho = \frac{\mathrm{d}T}{T(\gamma-1)}$, le bilan enthalpique donne $\mathrm{d}T/T = -\frac{(\gamma-1)M}{R\gamma T}\,v\,\mathrm{d}v$. La conservation du débit assure alors :

$$\frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{\mathrm{d}v}{v} - \frac{M}{R\gamma T}\frac{\mathrm{d}c}{c} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\mathrm{d}c}{c}\left(\frac{Mv^2}{\gamma RT} - 1\right).$$

   (d) On constate que si la vitesse est supérieure à $c_c = \sqrt{\gamma RT/M}$, les variations de section et de v sont de même signe : un élargissement de la tuyère conduit à une accélération du gaz. Dans tous les systèmes de propulsion à réaction (avion, fusée…), on cherche à éjecter les gaz avec la vitesse la plus grande possible. On sera donc parfois amené à utiliser des tuyères d'abord convergentes, tant que la vitesse des gaz est inférieure à c, puis divergente, quand celle-ci a dépassé c.

   (e) L'adiabaticité sera facilement vérifiée si l'écoulement est assez rapide : les transferts thermiques n'auront pas le temps de s'effectuer. En revanche l'hypothèse d'évolution quasistatique sera plus délicate à vérifiée et ne le sera certainement pas si la vitesse de l'écoulement est trop élevée : le gaz n'aura pas le temps d'établir l'équilibre thermodynamique au fur et à mesure de sa propagation.

3. (a) Exprimons la quantité de mouvement du système fermé de masse $m(t)$:
   - À l'instant initial : $\vec{P}(t) = m(t)\vec{V}$,
   - À $t + \mathrm{d}t$: $\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \left(m(t) - \mu_m \mathrm{d}t\right)\left(\overrightarrow{V(t+\mathrm{d}t)}\right) + \mu_m \mathrm{d}t\left(\vec{V}(t) + \vec{v}\right)$.

   La deuxième loi de Newton assure alors que $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)}{dt} = \vec{F}$, avec $\vec{F}$ la résultante des forces galiléennes exercées sur l'ensemble du système, soit :

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = m(t)\left(\vec{V}(t+\mathrm{d}t) - \vec{V}(t)\right) + \mu_m\,\mathrm{d}t\left(\overrightarrow{V(t)} - \vec{V}(t+\mathrm{d}t)\right) + \mu_m\,\mathrm{d}t\,\vec{v}$$

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \vec{F}\,\mathrm{d}t - \mu_m\,\mathrm{d}t\,\vec{v} \to m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F} - \mu_m\,\vec{v}.$$

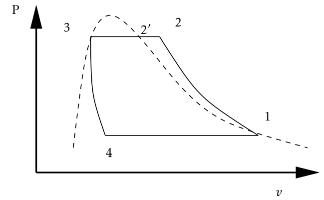
   à l'aide d'un développement limité au premier ordre en $\mathrm{d}t$. On constate qu'aux forces galiléennes s'ajoute le terme $-\mu_m\,\vec{v}$ qu'on nommera « force propulsive » , qui accélérera la fusée si $\vec{v}$ et $\vec{V}$ sont de sens opposé, *ie* si les gaz sont éjectés vers l'arrière évidemment.

   (b) On a intérêt à accélérer au maximum les gaz produits pour augmenter cette force propulsive.

Correction de l'exercice 8

Le cycle est représenté sur la figure 4 : on se déplace en particulier à $s = $ cste sur les étapes adiabatiques et réversibles.

1. (a) L'allure du cycle est représentée sur la figure ci-contre. Le fluide :



   - reçoit un travail positif pendant la compression $1 \to 2$, d'une part dû aux forces de pression exercées par le reste du fluide (travail de transvasement) et d'autre part du compresseur (travail utile).
   - reçoit seulement un travail positif de transvasement pendant la transformation $2 \to 3$. Il fournit en revanche un transfert thermique positif au condenseur lors de sa liquéfaction,
   - fournit uniquement un travail positif de transvasement à l'extérieur pendant $3 \to 4$,
   - fournit un travail positif de transvasement et reçoit un transfert thermique positif de l'évaporateur.

   (b) Le seul travail utile est reçu par le fluide au cours de la compression $1 \to 2$.

   (c) L'efficacité e d'une pompe à chaleur est le quotient du transfert thermique fourni à la source chaude sur le travail reçu par cycle. C'est ici au cours de la condensation $2 \to 3$ que le fluide réchauffe la source chaude et au cours de la compression $1 \to 2$ que le fluide reçoit $w_{1\to2}$. On lit sur la courbe :
   - $h(1) = 355\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ et $s(1) = 1{,}55\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.
   - 2 : vapeur sèche à $P_2 = 15\,\mathrm{bar}$, on connaît $s(2) = 1{,}55\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$, on lit $h_2 = 380\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.
   - 3 : liquide juste saturant à $\theta_3 = 60\,^\circ\mathrm{C}$, $P_3 = P_2$, on lit $h(3) = 260\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ et $s_3 = 1{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$
   - 4 : mélange liquide/vapeur à θ_1 et P_1. On a $h(4) = h(3)$, on lit $s_4 1{,}22\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

   Le premier principe industriel pour un écoulement stationnaire s'écrit, en négligeant les variations d'énergie mécanique $\Delta h = w_a + q$. On a donc $w_{1\to2} = h_2 - h_1 = 25\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ sur la compression adiabatique. Dans le condenseur $q_{2\to3} = h_3 - h_2 = -120\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.
   On en déduit l'efficacité $e = \frac{-q_{2\to3}}{w_{1\to2}} = 4{,}8$.

(d) Il reste à déterminer le transfert thermique reçu de la source froide dans l'évaporateur. À nouveau, on a $q_{4\to1} = h(1) - h(4) = h(1) - h(3) = 94\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. On vérifie bien que $q_{2\to3} + q_{4\to1} + w_{\circlearrowleft} = 0$.

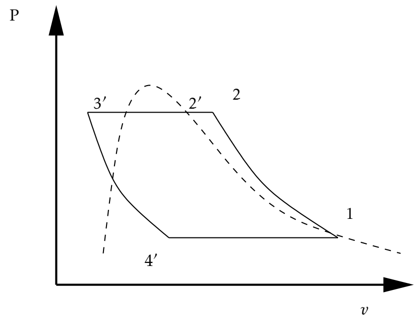
(e) On utilise le théorème des moments. La fraction x_v de vapeur saturante vaut au point 4 :

$$x_v = \frac{h_4 - h_l}{h_v - h_l} = 0,38.$$

2. Ici, seuls les états 3 et 4 sont modifiés. La nouvelle allure du cycle est représentée ci-contre. Le travail $w_{\circlearrowleft}$ est inchangé. Le transfert thermique $q_{2\to3'}$ vaut désormais $h(3') - h(2)$, avec $h(3') = 238\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ soit

$$-q_{2\to3'} = -145\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}$$

soit $e = 5{,}8$.



Correction de l'exercice 9

Lecture du diagramme

1. La vaporisation est caractérisée par des variations positives de l'enthalpie et de l'entropie, donc à une traversée de la courbe de saturation vers le haut et la droite : le domaine de la vapeur sèche est au-dessus et à droite de la courbe de rosée.

2. (a) On a :

$$h = u + Pv \to \mathrm{d}h = \mathrm{d}u + P\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}s - P\,\mathrm{d}v + P\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P.$$

(b) À entropie s croissante et h enthalpie constante, la pression doit diminuer puisqu' alors $\mathrm{d}P = -\frac{\mathrm{d}s}{v}$ d'après la deuxième identité thermodynamique constante $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P = 0$ donc p diminue : le gaz se rapproche alors du gaz parfait pour lequel $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$: les isothermes seront des droites pour $s \to \infty$. Ce sont les courbes qui deviennent horizontales pour $s \to \infty$.

(c) La vaporisation s'effectue à pression et température constantes. Les isobares correspondantes sont donc les isothermes de changement d'état. On a de plus $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}s$ sur une isobare. Ces droites ont pour pente T.

3. (a) On a toujours $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s$ sur une isobare, et pour un gaz parfait :

$$\mathrm{d}s = c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} \to \qquad T = T_0\exp\left(\frac{s-s_0}{c_p}\right)$$

$$\text{soit}\quad \mathrm{d}h = T_0\exp\left(\frac{s-s_0}{c_p}\right)\mathrm{d}s, \to \qquad h = h_0 + c_pT_0\left(\exp\left(\frac{s-s_0}{c_p}\right) - 1\right):$$

l'enthalpie massique h varie exponentiellement en fonction de l'entropie massique pour un gaz parfait.

(b) Sous la courbe de rosée, la pente de l'isobare est T et on a toujours $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s$ de l'autre côté. Comme la température est continue, la pente est la même des deux côtés. Bien sûr cette pente change ensuite puisque les isobares d'une vapeur sèche ne sont pas des isothermes.

On peut en particulier identifier l'isobare $P = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ qui rejoint l'isotherme de la vapeur sèche $\theta = 100\,°\mathrm{C}$ sur la courbe de rosée.

4. Les isenthalpes sont les courbes en bleu. Elles sont rectilignes sous la courbe de saturation, la traversent sans rupture de pente puis leur pente croît en se rapprochant du comportement exponentiel du gaz parfait. Remarquons que les isothermes, en rouge, ne sont pas représentées sous la courbe de saturation puisqu'elles coïncident avec les isenthalpes. Leur pente est cependant discontinue à la traversée de la courbe de saturation.

Cycle de Rankine On a tracé le cycle sur la figure 6.

1. Comme vu en cours.
2.

(a) Comme montré précédemment, les transformations de $A \to D$ sont représentées par des segments de droite, dont on détermine les extrémités :

- $h_A = h_l(P_2), s_A = s_l(P_2)$,
- $h_B = h_v(P_2), s_A = s_v(P_2)$,
- $h_D = h_l(P_1)\ s_D = s_l(P_1)$,
- C est l'intersection de la verticale issue de B et du segment $[h_l(P_1), s_l(P_1)][h_v(P_1), s_v(P_1)]$, de pente T_1, soit $h_c = 2172\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Le point E ne peut être placé précisément qu'en connaissant l'équation d'état de l'eau liquide. On a ici simplement prolongée la droite de l'isobare à P_2, T_2 du mélange puisqu'ici encore il y a continuité de la pente à travers de la courbe d'ébullition.

(b) Les échanges thermiques n'ont lieu que lors des transformations isobares $E \to B$ et $C \to D$ sur lesquelles ils valent respectivement $q_c = \Delta_{E\to B}h$ et $q_f = \Delta_{D\to C}h$. On a alors $w_{\circlearrowleft} = -(q_c + q_f)$ et le rendement $r = 1 - \frac{h_C - h_D}{h_B - h_E} \simeq 1 - \frac{h_C - h_D}{h_B - h_D} = 22\%$ puisque $D \simeq E$ en diagramme de Mollier.

(c) On doit considérer des transformations d'eau liquide monophasée.

compression isentropique $D \to E$: La deuxième identité thermodynamique assure $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P$. On a donc $\mathrm{d}h = v\,\mathrm{d}P$ et, pour $v \simeq 1\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$ et $\Delta P = 11{,}8\,\mathrm{bar}$, la variation d'enthalpie massique sera $\Delta h_{D\to E} \simeq 1{,}2\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

réchauffement isobare $E \to A$: on utilise le modèle de la phase condensée indilatable t incompressible $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$, avec $c = 4{,}18\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. La variation d'enthalpie massique est alors $\Delta h_{E\to A} \simeq 535\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

Correction de l'exercice 10

1. L'allure du cycle est très proche de celle d'un cycle de Beau de Rochas, les adiabatiques $PV^\gamma = cste$ étant remplacées par des isothermes hyperboliques $PV = cste$.

2. Au cours des isochores réversibles, le transfert thermique de l'extérieur vers la machine est égal à la variation d'énergie interne $\Delta U = Q_v = nC_{v,m}\Delta T$ pour un gaz parfait. Comme une de ces isochores s'effectue de T_f à T_c et l'autre en sens inverse de T_c à T_f, les transferts thermiques correspondant sont opposés.

3. (a) Dans les machines de Stirling régénératives, une grille métallique se réchauffe en récupérant l'énergie du transfert thermique de T_c à T_c. Le réchauffement lors de l'autre isochore, de T_f à T_f s'effectue en récupérant cette même énergie de la grille.

(b) Comme ces transferts thermiques sont internes à la machine, il ne s'agit plus d'une source extérieure puisque l'énergie libérée lors du refroidissement n'est pas perdue par dissipation dans l'atmosphère comme dans le cas d'un Beau de Rochas. Seuls les échanges lors des isothermes s'effectuant avec l'extérieur, le rendement r s'exprime selon : $r = \frac{-W}{Q_c}$. Q_c est le transfert thermique lors d'une détente isotherme d'un gaz parfait, donc isoénergétique : $Q = -W = \int P\,\mathrm{d}V = nRT_c \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_c \ln\frac{V_M}{V_m}$, avec V_M le volume maximale et V_m le volume minimal. De la même manière, on a $Q_f = -nRT_f \ln\frac{V_M}{V_m}$. Le travail total sur le cycle est, en vertu du premier principe pour un cycle, $-(Q_c + Q_f) = (T_f - T_c)nR\ln\frac{V_M}{V_m}$, on retrouve finalement le rendement de Carnot : $r = 1 - \frac{T_f}{T_c}$.

Correction de l'exercice 11

Il faut dans cet exercice prêter attention aux conventions de sens pour les échanges énergétiques, pas toujours orientés vers la machine thermique. Notons $r = 1 - T/T' = W_{\circlearrowleft}/Q'$ le rendement du moteur idéal et $e = T/(T - T_0) = Q_2/W_{\circlearrowleft}$ l'efficacité de la pompe à chaleur, elle aussi idéale. L'efficacité e_{tot} = du dispositif entier est ici le rapport du transfert thermique reçu par la serre $Q_1 + Q_2$ par l'énergie dépensée Q', soit $e_{\text{tot}} = (Q_1 + Q_2)/Q'$. On a $r \times e = Q_2/Q'$ et le quotient Q_1/Q' se détermine en utilisant le premier principe sur un cycle du moteur : $Q' - Q_1 - W_{\circlearrowleft} = 0$, soit $Q_1/Q' = 1 - r$. On obtient finalement : $e_{\text{tot}} = 1 - r + er = 1 + r(e-1) = \frac{T}{T'}\frac{T' - T_0}{T - T_0}$. Cette efficacité est supérieure (puisque $e \geqslant 1$) à celle du simple chauffage par la chaudière, d'efficacité 1.

Correction de l'exercice 12

En supposant que la variation de température de chaque source par cycle est faible, on peut appliquer les relations usuelles des machines thermiques : $Q_f + Q_c + W = 0$ et $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$. Les transferts thermiques sont reliés aux variations de température des sources par $Q_i = -C dT_i$. On reconnaît dans l'égalité de Clausius $\frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0$, la dérivée logarithmique de $T_f T_c$ qui est donc constante. Le moteur s'arrête de fonctionner quand son rendement est nul, soit $T_f = T_c = T_f = \sqrt{T_{10} T_{20}}$. Le transfert thermique de chacune des sources au temps infini vaut $-Q_f = C(T_f - T_{10})$ et $-Q_c = C(T_f - T_{20})$. Puisque $Q_f + Q_c = -W_{tot}$, travail total fourni par la machine, on a $-W_{tot} = C(T_{10} + T_{20} - 2\sqrt{T_{10}T_{20}}) = C(\sqrt{T_{10}} - \sqrt{T_{20}})^2$.

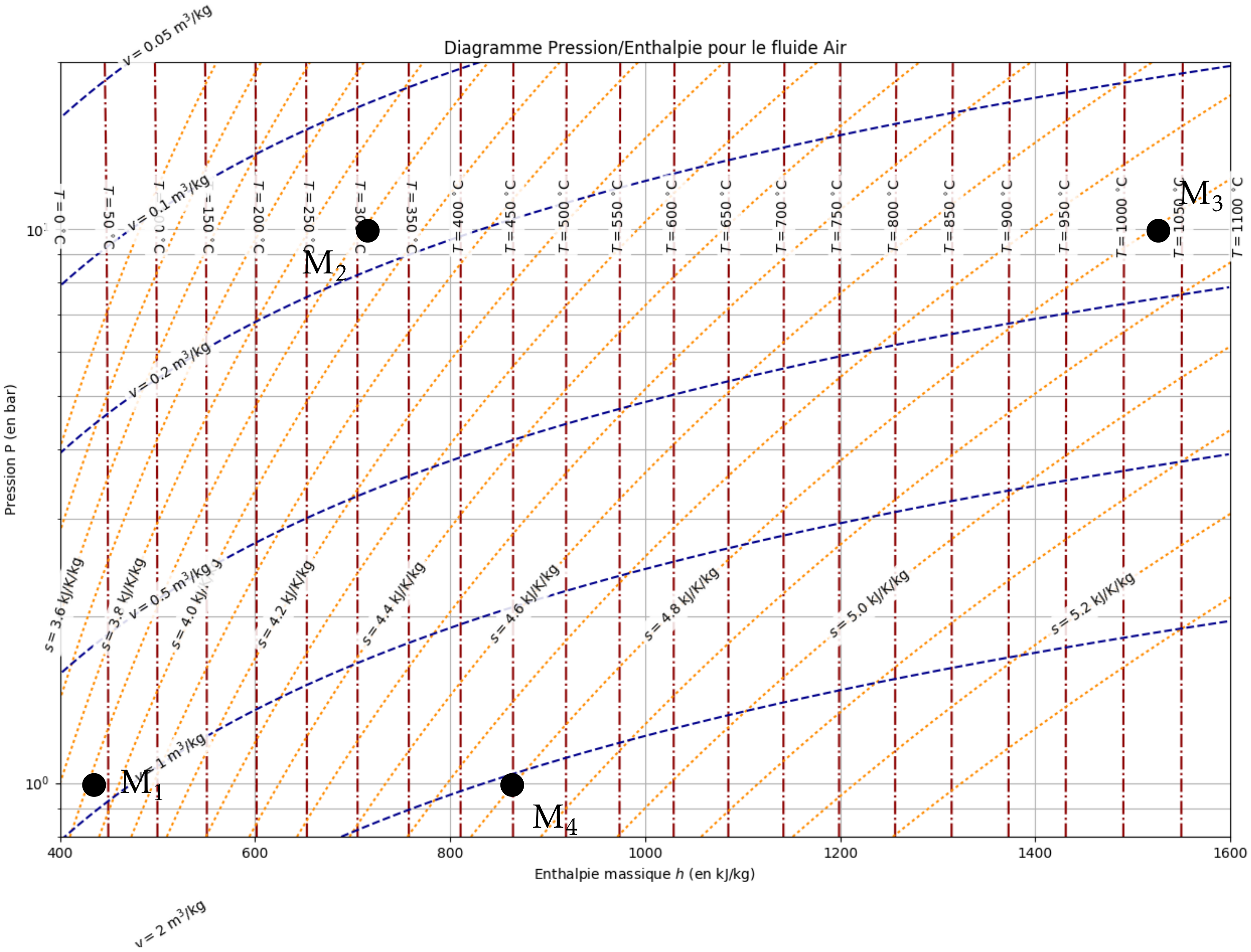


Fig. 4 : Diagramme P, h de l'air

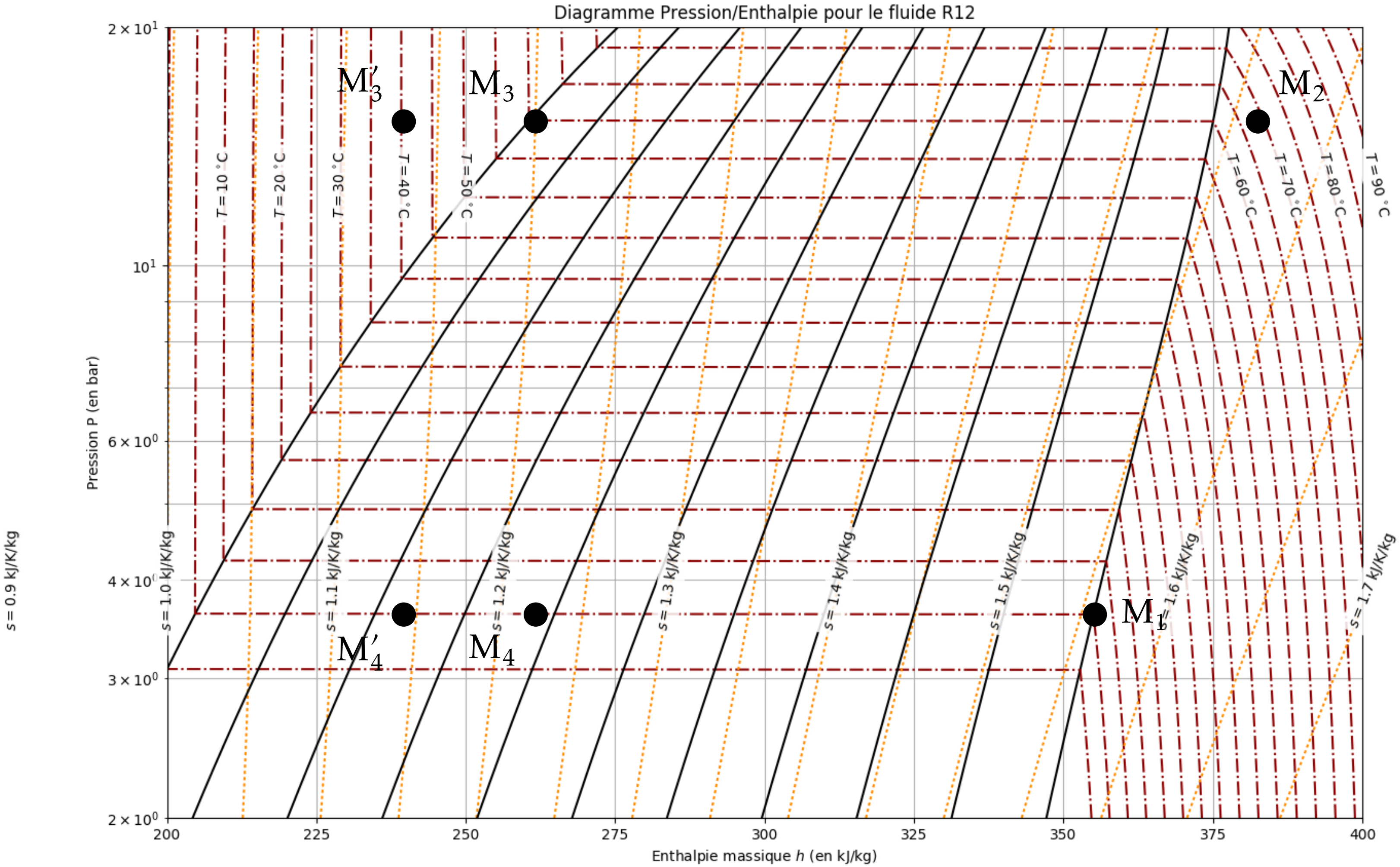


Fig. 5 : Diagramme P, h du fréon (R12)

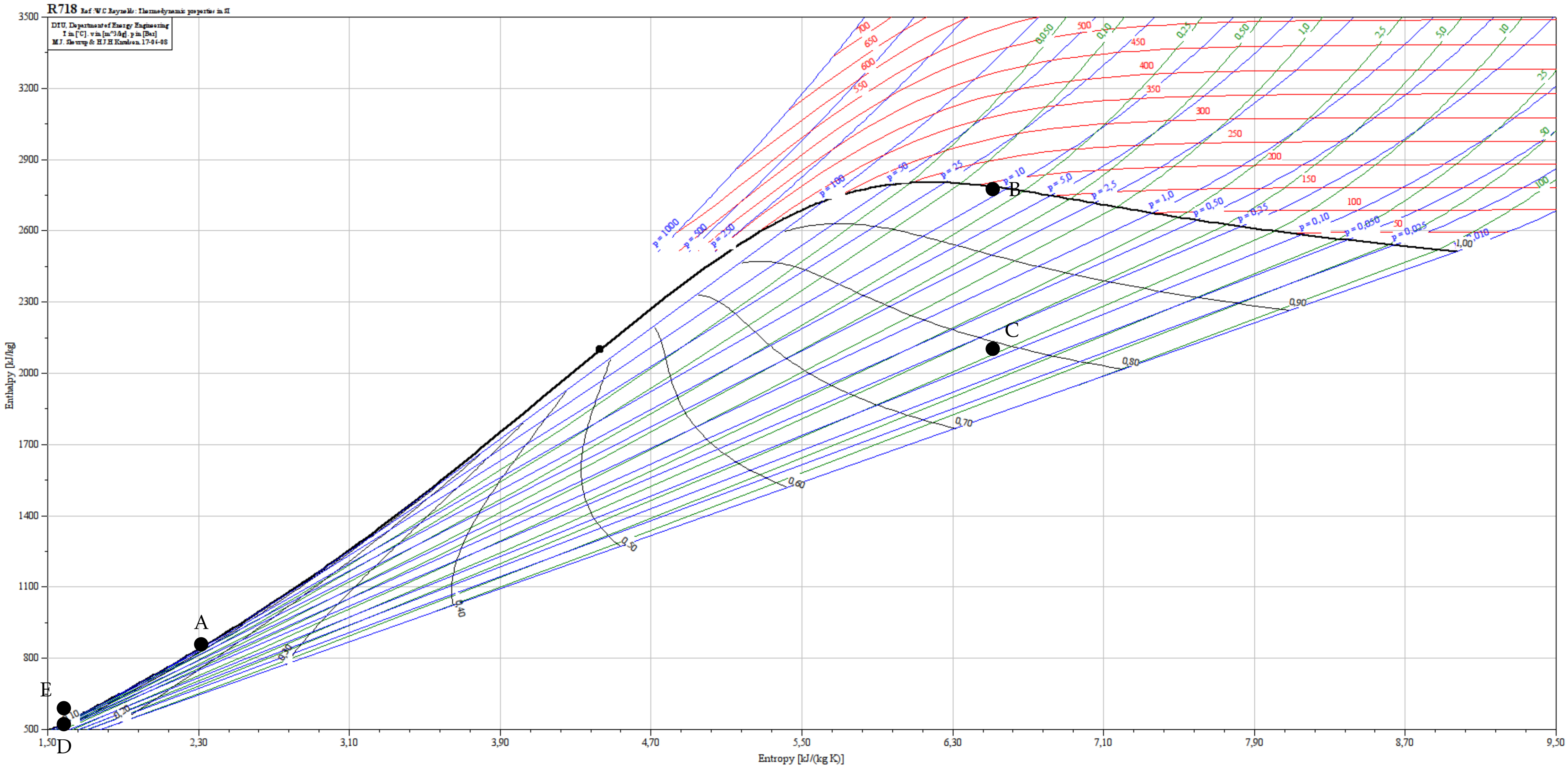


Fig. 6 : Diagramme de Mollier de l'eau